



Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapă locală 14.02.2026 Giurgiu

Clasa a VIII a

*Toate subiectele sunt obligatorii**Se acordă 10 puncte din oficiu**Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**Scrieți rezolvările complete*

- 1) Demonstrați că produsul a patru numere naturale consecutive nenule poate fi scris ca diferența pătratelor a două numere naturale nenule.

$$a(a+1)(a+2)(a+3) = \quad 1,5 \text{ p}$$

$$(a^2 + 3 \cdot a) \cdot (a^2 + 3 \cdot a + 2) = \quad 7\text{p}$$

$$(a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3 \cdot a) + 1 - 1 = \quad 7\text{p}$$

$$[(a^2 + 3 \cdot a) + 1]^2 - 1^2 \quad 7\text{p}$$

Prof. Coada Monica

- 2) Aflați cele mai mici valori naturale ale lui a și b , unde $a \leq b$, știind că $[\sqrt{a^2 + 47b}] = \sqrt{b^2 + 47a}$.
 $[x]$ este notația pentru partea întreagă a lui x .

$$[\sqrt{a^2 + 47b}] \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sqrt{b^2 + 47a} \in \mathbf{Z} \Rightarrow b^2 + 47a \text{ este pătrat perfect} \quad 5\text{p}$$

$$[\sqrt{a^2 + 47b}] \leq \sqrt{a^2 + 47b} \Rightarrow \sqrt{b^2 + 47a} \leq \sqrt{a^2 + 47b} \Rightarrow b^2 + 47a \leq a^2 + 47b \quad 5\text{p}$$

$$(b-a)(b+a-47) \leq 0, \text{ dar } (b-a) \geq 0 \Rightarrow b+a-47 \leq 0 \Rightarrow b+a \leq 47 \quad 5\text{p}$$

Se găsesc toate perechile posibile (a, b) care verifică inegalitatea:

$$(1,1), (1,2) \dots \dots (1,46), (2,2), (2,3) \dots \dots (2,43), (2,44), (2,45) \dots \quad 2,5\text{p}$$

Perechea care verifică toate condițiile: $b+a \leq 47$, $b^2 + 47a$ este pătrat perfect și a, b cele mai mici valori este $(43,2)$ 5p

Prof. Tincu Elena

- 3) Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Dacă H este ortocentrul $\triangle ABC$, D este ortocentrul $\triangle BCD$, iar picioarele perpendicularelor din D și A pe BC coincid, notând cu E piciorul perpendicularei din A pe BC.

Să se arate că: $HE \cdot AE = DE^2$.

Prof. Coada Monica

H este ortocentru pentru $\triangle ABC \Rightarrow \triangle BCD$ dreptunghic $\Rightarrow (\sphericalangle D = 90^\circ)$ 1,5 p

$$DE \perp BC \Rightarrow DE^2 = EB \cdot EC$$

$$\triangle CEH \sim \triangle AEB \text{ (U} \cdot \text{U)}$$

6p

$$\frac{CE}{AE} = \frac{HE}{EB} \Rightarrow BE \cdot CE = AE \cdot EH$$

6p

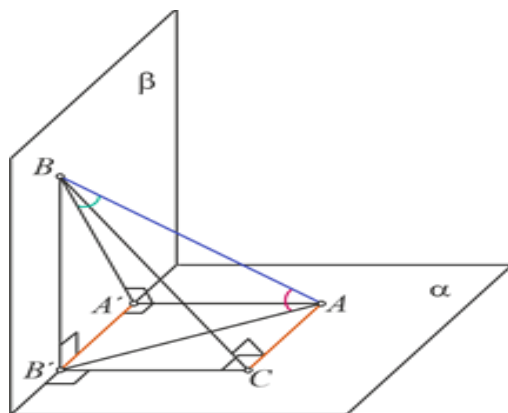
$$DE^2 = AE \cdot EH$$

6p

Realizarea figurii 3p

- 4) Se consideră planele perpendiculare α și β și dreptele necoplanare d și g , astfel încât $\alpha \cap \beta = d$, $g \cap \alpha$ este punctual A și $g \cap \beta$ este punctul B. Fie A' proiecția lui A pe dreapta d și B' proiecția lui B pe dreapta d. Notăm cu a și b măsurile unghiurilor dintre dreapta g și planul α , respectiv dintre dreapta g și planul β . Dacă $AB = k > 0$, iar unghiul dintre dreptele d și g este de 60° , calculați $\cos^2 a + \cos^2 b$.

Viitori olimpici



Solutie:

Alegem punctul C în planul α , astfel încât $AA'B'C$ este dreptunghi.

2,5 p

$$\Rightarrow \sphericalangle (AB, A'B') = \sphericalangle BAC = 60^\circ.$$

Folosind teorema celor trei perpendiculare, din $BB' \perp \alpha$, $B'C \perp AC$, $AC, B'C \subset \alpha \Rightarrow$

5p

$$BC \perp AC, \triangle ABC \text{ este } \triangle \text{ dreptunghic cu un unghi de } 60^\circ \Rightarrow A'B' = AC = \frac{AB}{2} = \frac{k}{2}$$

5p

$$BB' \perp \alpha \Rightarrow \sphericalangle BB'A = 90^\circ \text{ și } a = \sphericalangle (AB, \alpha) = \sphericalangle BAB'.$$

$$AA' \perp \beta \Rightarrow \sphericalangle AA'B = 90^\circ \text{ și } b = \sphericalangle (AB, \beta) = \sphericalangle ABA'.$$

5p

$$\Rightarrow \cos^2 a + \cos^2 b = \frac{5}{4}$$

5 p